DIE AUFGABE DER SECHS PUNKTE IN DER PHOTOGRAMMETRIE

VON

WILHELM SCHEUFELE.

VON DER K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU MÜNCHEN ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN GENEHMIGTE

DISSERTATION.

REFERENT: Professor Dr. SEBASTIAN FINSTERWALDER.
KORREFERENT: Professor Dr. ANTON VON BRAUNMÜHL.

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 18. MÄRZ 1907.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1907.

Einleitung.

Seitdem die Vervollkommnung des photographischen Apparates es ermöglicht hat, selbst bei größerem Gesichtsfeld noch perspektivisch richtige Bilder eines Geländes auf bequeme Weise herzustellen, hat man auch schon wiederholt mit gutem Erfolg photographische Aufnahmen zu Vermessungszwecken benützt. Von den beiden Hauptaufgaben, welche als Anwendung der Photographie auf die Feldmeßkunst erscheinen, nämlich Rekonstruktion des Geländes aus mehreren Photographien und Bestimmung des Standpunktes, von dem aus eine Photographie aufgenommen wurde, hat bisher nur die erste praktische Bedeutung erlangt. Die zweite Aufgabe dagegen hat meist nur zu theoretischen Untersuchungen Anlaß gegeben und dabei zu neuen Problemen geführt, welche als Verallgemeinerungen der bekannten Methode des ebenen Rückwärtseinschneidens aufgefaßt werden können. Mit der allgemeinen Lösung dieser zweiten Aufgabe beschäftigt sich die vorliegende Arbeit.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, kurz einige Begriffe zu erklären, welche im folgenden häufig gebraucht werden. Man bezeichnet das Lot, welches vom optischen Mittelpunkt des Objektivs auf die Ebene der photographischen Platte (Bildebene) gefällt werden kann, als optische Achse; die Länge dieses Lotes heißt Bildweite, der Fußpunkt desselben Hauptpunkt der Photographie. Die Schnittgerade der Bildebene mit der durch den optischen Mittelpunkt gelegten Horizontalebene ist der Horizont des Bildes. Der Schnittpunkt der durch den Linsenmittelpunkt gezogenen Vertikalen mit der Bildebene ist der Fluchtpunkt der Vertikalen (Nadir, Zenith). Hauptpunkt und Bildweite nennt man die inneren Orientierungselemente der Photographie, während die Richtung der optischen Achse im Objektraum, Horizont und Nadir als äußere Orientierungselemente bezeichnet werden.

Wenn eine zweckmäßige Einrichtung des photographischen Apparates es gestattet, Bildweite, Hauptpunkt und Horizont einer Photo-

graphie sofort anzugeben, so kann man sowohl durch Konstruktion als auch durch Rechnung in einfacher Weise aus der Photographie die Horizontal- und Vertikalwinkel der Sehstrahlen vom Standpunkt nach den Objektpunkten finden; mit Hilfe dieser Winkel läßt sich durch ebenes Rückwärtseinschneiden nach bekannten Objektpunkten der Grundriß des Standpunkts und die Höhe desselben leicht berechnen. Besonders einfach gestaltet sich die Lösung, wenn die Bildebene vertikal stand.[1])

Kennt man von einer Photographie nur die innere Orientierung (Hauptpunkt und Bildweite), so kann man daraus zwar die Horizontal- und Vertikalwinkel nicht mehr entnehmen; wohl aber kennt man dann noch die Winkel, welche die Strahlen des Sehstrahlenbündels unter sich bilden. Hieraus findet man den Standpunkt durch Rückwärtseinschneiden im Raum.[2])

Ist die innere Orientierung nicht bekannt, so können auch die Winkel der Sehstrahlen aus der Photographie nicht mehr berechnet werden. Dagegen sind die Doppelverhältnisse des Sehstrahlenbündels dieselben wie die Doppelverhältnisse des entsprechenden Punktfeldes in der Photographie. Bemerkenswert ist nun, daß auch diese Doppelverhältnisse zur Bestimmung des Standpunktes ausreichen. In dem Falle daß die Bildebene vertikal stand und die Richtung des Horizontes gegeben ist, kann man den Grundriß des Standpunktes durch ein ebenes Problem finden, das unter dem Namen „Problem der fünf Punkte“ bekannt ist. An Stelle der zwei Winkel, welche beim Snelliusschen Problem notwendig sind, treten hier zwei unabhängige Doppelverhältnisse, welche die Kenntnis der Grundrisse und der Bilder von 5 Punkten des Objektes erfordern.

Denkt man sich durch alle Strahlen des Bündels vom Standpunkt O nach den Objektpunkten A, B, C, D, E Vertikalebenen gelegt und dieses Ebenenbüschel sowohl mit der Bildebene als auch mit der Grundrißebene zum Schnitt gebracht, so überzeugt man sich leicht, daß das Strahlenbüschel $O_0(A_0B_0C_0D_0E_0)$ in der Grundrißebene projektiv ist zu der Punktreihe $A''B''C''D''E''$, die man durch Projektion der Bildpunkte $A'B'C'D'E'$ auf die Richtung des Horizontes HH

1) Formeln zur Berechnung der Horizontal- und Vertikalwinkel aus orientierten Bildern befinden sich in C. Koppe, Photogrammetrie Weimar 1889. S. 8; und in S. Finsterwalder, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Band VI. 2. S. 32—33.

2) S. Finsterwalder und W. Scheufele, Das Rückwärtseinschneiden im Raum. Sitzungsberichte der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften. München 1903. S. 591—614.

erhält. Die Bestimmung des Standpunkt-Grundrisses O_0 kommt also darauf hinaus, durch die Punkte $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$ fünf Strahlen eines Büschels so zu legen, daß sie miteinander die gleichen Doppelverhältnisse bilden wie die entsprechenden Punkte $A'' B'' C'' D'' E''$ in der Bildebene.

Diese Aufgabe ist schon wiederholt gelöst worden. O_0 ist der vierte Schnittpunkt zweier Kegelschnitte, deren drei andere Schnittpunkte bereits bekannt sind. Der erste Kegelschnitt ist bestimmt durch die Punkte $A_0 B_0 C_0 D_0$ und das Doppelverhältnis $O_0(A_0 B_0 C_0 D_0) = A_0(A_0 B_0 C_0 D_0) = (A'' B'' C'' D'')$; der zweite Kegelschnitt ist bestimmt durch die Punkte $A_0 B_0 C_0 E_0$ und das Doppelverhältnis $O_0(A_0 B_0 C_0 E_0) = A_0(A_0 B_0 C_0 E_0) = (A'' B'' C'' E'')$. F. Steiner[1]) hat die Aufgabe graphisch dadurch gelöst, daß er die zwei Kegelschnitte punktweise konstruierte. Kinkel[2]) und Mandl[3]) benützten zur Konstruktion des Punktes O_0 die zerfallenen Kegelschnitte des Kegelschnittbüschels mit den Grundpunkten $A_0 B_0 C_0 O_0$; der erstere konstruiert zuerst das gemeinsame Polardreieck des Büschels, der letztere die Punkt-Involution, welche von dem Kegelschnittbüschel auf der Geraden $D_0 E_0$ ausgeschnitten wird. Besonders einfach wird die Lösung, wenn die drei Punkte $A_0 B_0 C_0$ auf einer Geraden liegen, weil dann die beiden Kegelschnitte in zwei Geradenpaare ausarten.

Fig. 1a.

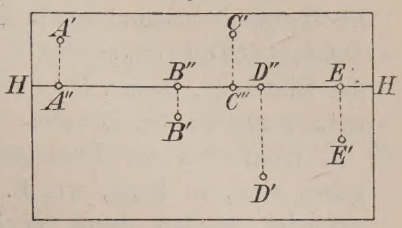
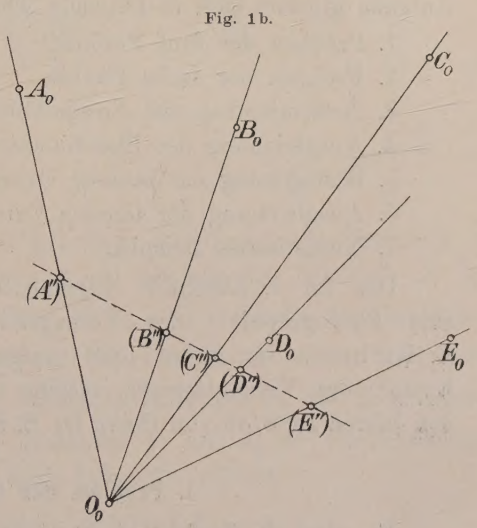


Fig. 1b.



F. Steiner[1]) und Mandl[3]) haben auch analytische Lösungen des Problems der fünf Punkte angegeben, die aber ihres Umfangs wegen sich zur wirklichen Berechnung wenig eignen.

Ist der Grundriß des Standpunktes gefunden, so bekommt man in

1) F. Steiner, Die Photographie im Dienste des Ingenieurs. Wien 1891/93. S. 24 ff.

2) Wochenschrift des österr. Ing. u. Arch. Vereins 1891. Nr. 32.

3) J. Mandl, Über Verwertung von photographischen Aufnahmen aus dem Luftballon. Mitt. über Gegenst. d. Artill. u. Genie-Wesens 1898.

einfacher Weise auch die Höhe desselben, sowie die innere Orientierung der Photographie.

Das Problem der fünf Punkte reicht zur Bestimmung des Standpunkt-Grundrisses auch dann noch aus, wenn zwar die Bildebene nicht vertikal stand, dafür aber der Fluchtpunkt N der Vertikalen auf der Photographie bekannt ist; in diesem Fall ist nämlich das Strahlenbüschel $O_0(A_0B_0C_0D_0E_0)$ projektiv zu dem Strahlenbüschel $N(A'B'C'D'E')$ in der Bildebene, dessen Doppelverhältnisse wieder aus der Photographie entnommen werden können.

Wenn von der Photographie keinerlei Orientierungselemente gegeben sind, so kann, wie E. Wälsch[1]) gezeigt hat, der Standpunkt gefunden werden durch zweimalige Lösung des Problems der fünf Punkte; notwendig ist dazu die Kenntnis der gegenseitigen Lage von sechs Punkten des Objektes und ihrer Bilder. Nachdem der Standpunkt gefunden ist, bietet die Bestimmung der inneren Orientierung keine Schwierigkeiten mehr. Die analytische Durchführung dieser Aufgabe gliedert sich in folgende Abschnitte:

1. Problem der fünf Punkte;
2. Problem der sechs Punkte;
3. Determination und Spezialfälle;
4. Ausgleichung des Standpunktes;
5. Bestimmung der inneren Orientierung;
6. Ausgleichung der inneren Orientierung;
7. Numerisches Beispiel.

Das im 7. Abschnitt behandelte Zahlenbeispiel stützt sich auf eine Photographie[2]) des Vernagtferners, welche auf Veranlassung E. Richters im Jahre 1884 aufgenommen wurde, sowie auf die Karte[3]) des Vernagtferners, welche auf Grund seiner Vermessung in den Jahren 1888/89 von Herrn Dr. S. Finsterwalder gezeichnet wurde.

1. Problem der fünf Punkte.

Es sind 5 Punkte A, B, C, D, E gegeben; gesucht wird ein Punkt P von der Eigenschaft, daß die Strahlen PA, PB, PC, PD und PE gegebene Doppelverhältnisse $P(CDEB) = K_1$ und $P(CDEA) = K_2$ miteinander bilden.

1) F. Steiner, Die Photographie im Dienste des Ingenieurs. Wien 1891/93. S. 24 ff.

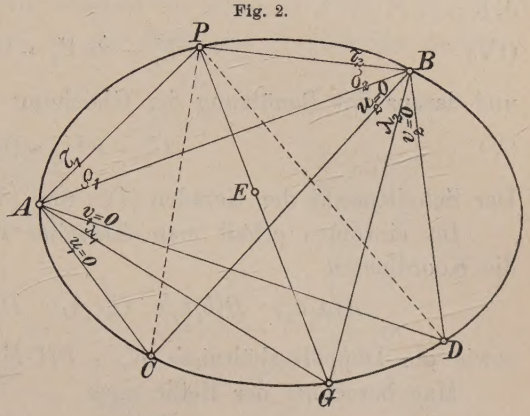
2) „1725. Kesselwandspitze v. Plattei.“ Verlag von Würthle und Sohn, Salzburg.

3) S. Finsterwalder, Der Vernagtferner. Wissenschaftl. Erg.-Hefte des D. u. Ö. Alpenvereins. I. Band, 1. Heft. Graz 1897.

Bewegt man den Punkt P mit Beibehaltung der Doppelverhältnisse so, daß zunächst nur 4 Strahlen des Büschels P durch ihre entsprechenden Punkte A, B, C, D hindurchgehen, so beschreibt P offenbar einen Kegelschnitt, der durch die Punkte A, B, C, D hindurchgeht. Zugleich ergibt sich hieraus, daß auch der fünfte Strahl immer durch einen festen Punkt G des gleichen Kegelschnitts gehen muß. Punkt P ist daher der zweite Schnittpunkt der Geraden GE mit dem genannten Kegelschnitt.

Der Kegelschnitt kann aufgefaßt werden als Erzeugnis zweier projektiver Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten A und B. Um die bilineare Beziehung, welche zwischen den Parametern entsprechender Strahlen beider Büschel bestehen muß, möglichst einfach zu gestalten, wählt man als Grundstrahlen des Büschels A die Geraden AC und AD mit den Gleichungen $U_1=0$ und $V_1=0$, und als Grundstrahlen des Büschels B die Geraden BC und BD mit den Gleichungen $U_2=0$ und $V_2=0$. Die Gerade AB hat dann als Gerade des Büschels A die Gleichung $U_1-\varrho_1 V_1=0$ und als Gerade des Büschels B die Gleichung $U_2-\sigma_2 V_2=0$; dabei ist $\varrho_1=\frac{U_1}{V_1}$, worin die laufenden Koordinaten durch die Koordinaten des Punktes B ersetzt sind, und $\sigma_2=\frac{U_2}{V_2}$, worin an Stelle der laufenden Koordinaten die Koordinaten des Punktes A getreten sind. Bedeuten λ_1 und λ_2 die Parameter der Geraden AG und BG, so ist nach bekannten Sätzen

Fig. 2.



$$\frac{\lambda_1}{\varrho_1}=A(CDGB)=P(CDEB)=K_1$$

und

$$\frac{\lambda_2}{\sigma_2}=B(CDGA)=P(CDEA)=K_2,$$

woraus $\lambda_1=\varrho_1 K_1$ und $\lambda_2=\sigma_2 K_2$ folgt. Die bilineare Beziehung zwischen λ_1 und λ_2 hat die Gestalt $\lambda_2=\varkappa\lambda_1$; und daraus folgt $\varkappa=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Die Gleichung der Geraden GP hat die Form $(U_1-\lambda_1 V_1)-\nu(U_2-\lambda_2 V_2)=0$; ν wird wieder aus dem Umstand bestimmt, daß die Gerade durch den Punkt E gehen soll; also wird $\nu=\left(\frac{U_1-\lambda_1 V_1}{U_2-\lambda_2 V_2}\right)_E$.

Sind τ_1 und $\tau_2 = \varkappa\tau_1$ die Parameter, die zum Punkt P gehören, so müssen die Koordinaten von P den 3 Gleichungen genügen

(I) $$(U_1 - \lambda_1 V_1) - \nu(U_2 - \lambda_2 V_2) = 0$$

(II) $$U_1 - \tau_1 V_1 = 0$$

(III) $$U_2 - \varkappa\tau_1 V_2 = 0.$$

Hieraus folgt durch geeignete Kombination

$$-\lambda_1 V_1 + \tau_1 V_1 + \varkappa\nu\lambda_1 V_2 - \varkappa\nu\tau_1 V_2 = 0$$

oder

$$(\tau_1 - \lambda_1)(V_1 - \varkappa\nu V_2) = 0$$

d. h.:

(IV) $$V_1 - \varkappa\nu V_2 = 0 \quad \text{(Gerade } DP\text{)};$$

und daraus mit Benützung der Gleichung (I):

(V) $$U_1 - \nu U_2 = 0 \quad \text{(Gerade } CP\text{)}.$$

Der Schnittpunkt der Geraden (IV) und (V) ist der gesuchte Punkt P.

Im einzelnen erhält man folgendes Formelsystem: Gegeben sind die Koordinaten

$$A(a_1 a_2) \quad B(b_1 b_2) \quad C(c_1 c_2) \quad D(d_1 d_2) \quad E(e_1 e_2),$$

sowie die Doppelverhältnisse $K_1 = P(CDEB)$ und $K_2 = P(CDEA)$.

Man berechnet der Reihe nach

$$(ab) = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \quad (ac) = \frac{c_2 - a_2}{c_1 - a_1} \quad (ad) = \frac{d_2 - a_2}{d_1 - a_1} \quad (bc) = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} \quad (bd) = \frac{d_2 - b_2}{d_1 - b_1}$$

$$\varrho_1 = \frac{(ab) - (ac)}{(ab) - (ad)} \quad \sigma_2 = \frac{(ab) - (bc)}{(ab) - (bd)} \quad \lambda_1 = \varrho_1 K_1 \quad \lambda_2 = \sigma_2 K_2$$

$$\varkappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \qquad \nu = \frac{(e_2 - a_2)(1 - \lambda_1) - (e_1 - a_1)[(ac) - \lambda_1(ad)]}{(e_2 - b_2)(1 - \lambda_2) - (e_1 - b_1)[(bc) - \lambda_2(bd)]}$$

$$(dp) = \frac{(ad) - \nu\varkappa(bd)}{1 - \nu\varkappa} \qquad (cp) = \frac{(ac) - \nu(bc)}{1 - \nu}$$

$$p_1 = \frac{c_1(cp) - d_1(dp) + d_2 - c_2}{(cp) - (dp)} \qquad p_2 = d_2 + (p_1 - d_1)(dp) = c_2 + (p_1 - c_1)(cp).$$

p_1 und p_2 sind die Koordinaten des gesuchten Punktes P.

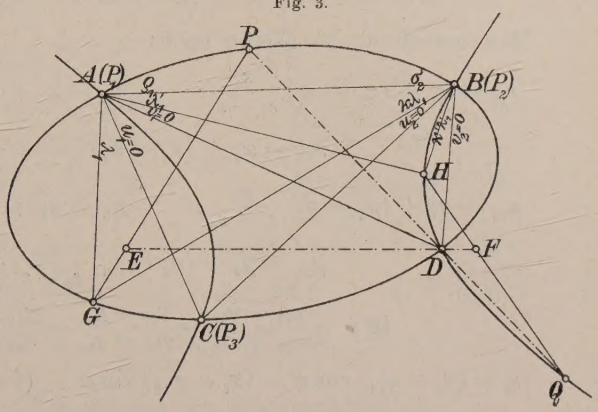
2. Problem der sechs Punkte.

Gegeben sind sechs Punkte $P_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ im Raum, sowie ihre Bildpunkte, die kurz mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet sein mögen.

Denkt man sich den gesuchten Standpunkt O mit dem Punkt P_4 verbunden und legt man durch diese Gerade und die übrigen 5 Punkte

Ebenen, so wird dieses Ebenenbüschel von irgend zwei Ebenen stets nach projektiven Strahlenbüscheln geschnitten. Wählt man als die eine Ebene die Bildebene, so ist das zugehörige Strahlenbüschel vollständig bekannt; es ist nämlich das Strahlenbüschel $4(1, 2, 3, 5, 6)$. Als zweite schneidende Ebene nimmt man zweckmäßig die Ebene $P_1P_2P_3$; diese Ebene wird nach einem Strahlenbüschel geschnitten, dessen Mittelpunkt P unbekannt ist. Dagegen erhält man sofort für jeden Strahl des Büschels einen Punkt, wenn man von P_4 aus alle übrigen Punkte auf die Ebene $P_1P_2P_3$ zentral projiziert; die Punkte $P_1P_2P_3$ gehen dabei in sich selbst über; die Zentralprojektionen der Punkte P_5 und P_6 sind D und E. Da nun die Doppelverhältnisse des Büschels $P(P_1P_2P_3DE)$ aus dem Büschel $4(1, 2, 3, 5, 6)$ in der Bildebene entnommen werden können, so hängt die Bestimmung des Punktes P nur von der Lösung des Problems der fünf Punkte in der Ebene $P_1P_2P_3$ ab. Die Gerade PP_4 ist dann ein erster geometrischer Ort für den Standpunkt O.

Fig. 3.



In gleicher Weise denkt man sich den Punkt O mit P_5 verbunden und durch diese Gerade und die übrigen Punkte Ebenen gelegt. Der Schnitt dieses Ebenenbüschels mit der Bildebene ist das bekannte Strahlenbüschsel $5(1, 2, 3, 4, 6)$. Der Schnitt mit der Ebene $P_1P_2P_3$ ist ein dazu projektives Strahlenbüschel $Q(P_1, P_2, P_3, D, F)$; Punkt F ist der Schnittpunkt der Geraden P_5P_6 mit der Ebene $P_1P_2P_3$. Punkt Q wird daher ebenfalls durch Lösen des Problems der fünf Punkte gefunden. Gerade QP_5 ist ein zweiter geometrischer Ort für den Standpunkt O.

Die Lage der Ebene $P_1P_2P_3$ gegenüber dem Koordinatensystem wird am einfachsten bestimmt durch ihre Schnittgerade $P_{12}P_{13}P_{23}$ mit der Grundrißebene und den Neigungswinkel ε gegen die Grundrißebene. Löst man in der Ebene $P_1P_2P_3$ zweimal das Problem der fünf Punkte und projiziert dann die ganze in der Ebene $P_1P_2P_3$ gelegene Figur orthogonal auf die Grundrißebene, so bleiben die Doppelverhältnisse, die allein die Punkte P und Q bestimmen, unverändert; man kann daher die Grundrisse der Punkte P und Q auch direkt in der Weise

finden, daß man die zweimalige Lösung des Problems der fünf Punkte gleich im Grundriß vornimmt. Hat man die Grundrisse von P und Q, so liefert der Schnittpunkt der Grundrisse von PP_4 und QP_5 auch den Grundriß des Standpunktes. Aus den Grundrissen und der bekannten Lage der Ebene $P_1P_2P_3$ ergeben sich leicht die dritten Koordinaten von P und Q und schließlich auch die dritte Koordinate des Standpunktes O.

Die ausführliche Rechnung führt zu folgendem Formelsystem: Gegeben sind die Objektpunkte

$$P_1(x_1y_1z_1),\ P_2(x_2y_2z_2),\ P_3(x_3y_3z_3),\ P_4(x_4y_4z_4),\ P_5(x_5y_5z_5),\ P_6(x_6y_6z_6)$$

und die Bildpunkte

$$1(\xi_1\eta_1),\ 2(\xi_2\eta_2),\ 3(\xi_3\eta_3),\ 4(\xi_4\eta_4),\ 5(\xi_5\eta_5),\ 6(\xi_6\eta_6).$$

Man berechnet der Reihe nach:

$$x_{12} = x_1 + (x_2 - x_1)\frac{z_1}{z_1 - z_2}, \qquad x_{13} = x_1 + (x_3 - x_1)\frac{z_1}{z_1 - z_3},$$

$$x_{23} = x_2 + (x_3 - x_2)\frac{z_2}{z_2 - z_3}.$$

$$y_{12} = y_1 + (y_2 - y_1)\frac{z_1}{z_1 - z_2}, \qquad y_{13} = y_1 + (y_3 - y_1)\frac{z_1}{z_1 - z_3},$$

$$y_{23} = y_2 + (y_3 - y_2)\frac{z_2}{z_2 - z_3}.$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{y_{13} - y_{12}}{x_{13} - x_{12}} = \frac{y_{23} - y_{12}}{x_{23} - x_{12}} = \frac{y_{23} - y_{13}}{x_{23} - x_{13}}.$$

$$s_i = (y_i - y_{12})\cos\psi - (x_i - x_{12})\sin\psi \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{z_1}{s_1} = \frac{z_2}{s_2} = \frac{z_3}{s_3}.$$

$$\lambda_{45} = \frac{z_4 - s_4\operatorname{tg}\varepsilon}{z_5 - s_5\operatorname{tg}\varepsilon}, \qquad \lambda_{46} = \frac{z_4 - s_4\operatorname{tg}\varepsilon}{z_6 - s_6\operatorname{tg}\varepsilon}, \qquad \lambda_{56} = \frac{z_5 - s_5\operatorname{tg}\varepsilon}{z_6 - s_6\operatorname{tg}\varepsilon}.$$

$$d_1 = \frac{x_4 - \lambda_{45}x_5}{1 - \lambda_{45}}, \qquad e_1 = \frac{x_4 - \lambda_{46}x_6}{1 - \lambda_{46}}, \qquad f_1 = \frac{x_5 - \lambda_{56}x_6}{1 - \lambda_{56}}.$$

$$d_2 = \frac{y_4 - \lambda_{45}y_5}{1 - \lambda_{45}}, \qquad e_2 = \frac{y_4 - \lambda_{46}y_6}{1 - \lambda_{46}}, \qquad f_2 = \frac{y_5 - \lambda_{56}y_6}{1 - \lambda_{56}}.$$

$$(ab) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ (ac) = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1},\ (ad) = \frac{d_2 - y_1}{d_1 - x_1},\ (bc) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2},\ (bd) = \frac{d_2 - y_2}{d_1 - x_2}.$$

$$(41) = \frac{\eta_4 - \eta_1}{\xi_4 - \xi_1},\ (42) = \frac{\eta_4 - \eta_2}{\xi_4 - \xi_2},\ (43) = \frac{\eta_4 - \eta_3}{\xi_4 - \xi_3},\ (45) = \frac{\eta_4 - \eta_5}{\xi_4 - \xi_5},\ (46) = \frac{\eta_4 - \eta_6}{\xi_4 - \xi_6},$$

$$(51) = \frac{\eta_5 - \eta_1}{\xi_5 - \xi_1},\ (52) = \frac{\eta_5 - \eta_2}{\xi_5 - \xi_2},\ (53) = \frac{\eta_5 - \eta_3}{\xi_5 - \xi_3} \qquad (56) = \frac{\eta_5 - \eta_6}{\xi_5 - \xi_6}.$$

$$K_1 = \frac{(46) - (43)}{(46) - (45)} : \frac{(42) - (43)}{(42) - (45)}, \qquad K_1' = \frac{(56) - (53)}{(56) - (45)} : \frac{(52) - (53)}{(52) - (45)}.$$

$$K_2 = \frac{(46) - (43)}{(46) - (45)} : \frac{(41) - (43)}{(41) - (45)}, \qquad K_2' = \frac{(56) - (53)}{(56) - (45)} : \frac{(51) - (53)}{(51) - (45)}.$$

$$\varrho_1 = \frac{(ab)-(ac)}{(ab)-(ad)}, \qquad \lambda_1 = \varrho_1 K_1, \qquad \lambda_1' = \varrho_1 K_1', \qquad \varkappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

$$\sigma_2 = \frac{(ab)-(bc)}{(ab)-(bd)}, \qquad \lambda_2 = \sigma_2 K_2, \qquad \lambda_2' = \sigma_2 K_2', \qquad \varkappa' = \frac{\lambda_2'}{\lambda_1'}.$$

$$\nu = \frac{(e_2-y_1)(1-\lambda_1)-(e_1-x_1)[(ac)-\lambda_1(ad)]}{(e_2-y_2)(1-\lambda_2)-(e_1-x_2)[(bc)-\lambda_2(bd)]},$$

$$\nu' = \frac{(f_2-y_1)(1-\lambda_1')-(f_1-x_1)[(ac)-\lambda_1'(ad)]}{(f_2-y_2)(1-\lambda_2')-(f_1-x_2)[(bc)-\lambda_2'(bd)]}. \quad \text{Probe: } \nu\varkappa = \nu'\varkappa'.$$

$$(dp) = (dq) = \frac{(ad)-\nu\varkappa(bd)}{1-\nu\varkappa}, \qquad (cp) = \frac{(ac)-\nu(bc)}{1-\nu}, \qquad (cq) = \frac{(ac)-\nu'(bc)}{1-\nu'}.$$

$$p_1 = \frac{x_3(cp)-d_1(dp)+d_2-y_3}{(cp)-(dp)}, \quad p_2 = d_2+(p_1-d_1)(dp) = y_3+(p_1-x_3)(cp).$$

$$q_1 = \frac{x_3(cq)-d_1(dq)+d_2-y_3}{(cq)-(dq)}, \quad q_2 = d_2+(q_1-d_1)(dq) = y_3+(q_1-x_3)(cq).$$

$$(p4) = \frac{p_2-y_4}{p_1-x_4}, \qquad (q5) = \frac{q_2-y_5}{q_1-x_5}.$$

$$\varrho = \frac{y_5-y_4-(x_5-x_4)(p4)}{q_2-y_4-(q_1-x_4)(p4)}, \qquad \sigma = \frac{y_4-y_5-(x_4-x_5)(q5)}{p_2-y_5-(p_1-x_5)(q5)}.$$

$$x_o = \frac{x_5-\varrho q_1}{1-\varrho} = \frac{x_4-\sigma p_1}{1-\sigma}, \qquad y_o = \frac{y_5-\varrho q_2}{1-\varrho} = \frac{y_4-\sigma p_2}{1-\sigma}.$$

$$s_p = (p_2-y_{12})\cos\psi-(p_1-x_{12})\sin\psi, \qquad p_3 = s_p \operatorname{tg}\varepsilon.$$

$$s_q = (q_2-y_{12})\cos\psi-(q_1-x_{12})\sin\psi, \qquad q_3 = s_q \operatorname{tg}\varepsilon.$$

$$z_o = \frac{z_5-\varrho q_3}{1-\varrho} = \frac{z_4-\sigma p_3}{1-\sigma}.$$

$x_o\ y_o\ z_o$ sind die Koordinaten des Standpunktes O.

3. Determination und Spezialfälle.

Die im vorigen Abschnitt angegebene Lösung der Aufgabe der sechs Punkte bedarf nach zwei Richtungen einer Ergänzung: Es ist einerseits noch zu untersuchen, unter welchen Umständen die Bestimmung des Standpunktes überhaupt unmöglich wird, und andererseits, wie die Lösung sich gestaltet, wenn die sechs gegebenen Punkte P_i eine besondere Lage im Raume haben.

Die Bestimmung des Standpunktes ist im wesentlichen geleistet, sobald die Punkte P und Q (vgl. Fig. 3) in der Ebene $P_1P_2P_3$ gefunden sind. Die Lage des Punktes P auf seinem Kegelschnitt ist offenbar dann und nur dann unbestimmt, wenn der Punkt E mit dem Punkt G zusammenfällt[1]) oder, was dasselbe ist, wenn P auf dem Kegelschnitt

1) Analytisch zeigt sich das dadurch, daß $\nu = \frac{0}{0}$ wird.

liegt, der durch die fünf Punkte $ABCDE$ hindurchgeht. Im Raum entspricht das dem Umstand, daß der Standpunkt auf dem Kegel zweiter Ordnung liegt, welcher den Kegelschnitt $ABCDE$ vom Punkt P_4 aus projiziert. Ähnliches gilt für den Punkt Q; die Lage des Punktes Q auf dem zugehörigen Kegelschnitt wird dann unbestimmt, wenn der Standpunkt auf dem Kegel liegt, der den Kegelschnitt $ABCDF$ vom Punkt P_5 aus projiziert. Nun ist aber aus der räumlichen Anschauung ohne weiteres ersichtlich, daß die Punkte PQD unter allen Umständen in einer Geraden liegen müssen, was analytisch durch die Probe $\nu\varkappa = \nu'\varkappa'$ gekennzeichnet ist. Daraus folgt, daß der Standpunkt selbst dann noch gefunden werden kann, wenn nur einer der Punkte P und Q auf seinem zugehörigen Kegelschnitt bestimmt ist. Unmöglich ist die Aufsuchung des Standpunktes nur dann, wenn er gleichzeitig auf den beiden Kegeln zweiter Ordnung $P_4(ABCDE)$ und $P_5(ABCDF)$ liegt. Diese zwei Kegel haben aber die Gerade P_4P_5 sowie diejenige Raumkurve dritter Ordnung gemeinsam, welche durch die Punkte $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ bestimmt ist. Der Fall, daß der Standpunkt auf der Geraden P_4P_5 liegt, ist praktisch bedeutungslos, da er ein Zusammenfallen der Bildpunkte 4 und 5 zur Folge hätte und überdies leicht vermieden werden könnte dadurch, daß man an Stelle von P_4 und P_5 zwei andere Punkte auszeichnet. Man gelangt zu dem Resultat:

Die Bestimmung des Standpunktes aus sechs Objektpunkten und ihren Bildern ist dann und nur dann unmöglich, wenn der Standpunkt zufällig auf der Raumkurve dritter Ordnung liegt, welche durch die sechs Objektpunkte hindurchgeht. Die Raumkurve dritter Ordnung ist daher „gefährlicher Ort“ für den Standpunkt.

Unter den Spezialfällen, welche durch eine besondere Lage der sechs gegebenen Punkte bedingt sind, ist zunächst der Fall zu besprechen, daß die sechs Punkte in einer Ebene liegen. Die Ebene der Punkte P_i und die Bildebene sind kollinear; die kollineare Beziehung ist aber bereits festgelegt durch die Zuordnung von vier Punkten der Objektebene und der Bildebene. Die Aufgabe, den Standpunkt zu suchen, kommt dann darauf hinaus, die zwei Ebenen in perspektive Lage zu bringen; dies ist bekanntlich stets auf unendlich viele Arten möglich. Das Zentrum der Perspektivität (Standpunkt) liegt auf einem Kreis (Halbkreis), dessen Ebene sowohl auf der Bildebene als auch auf der Objektebene senkrecht steht.

Wichtiger ist der Fall, daß vier der gegebenen Punkte, nämlich $P_1P_2P_3P_4$, in einer Ebene liegen, die beiden anderen P_5 und P_6 aber

außerhalb derselben. Mit Hilfe der kollinearen Beziehung zwischen der Ebene $P_1P_2P_3P_4$ und der Bildebene, die durch die vier Punkte gegeben ist, kann man leicht diejenigen Punkte P und Q berechnen, in denen die Sehstrahlen vom Standpunkt nach den Punkten P_5 und P_6 die Ebene $P_1P_2P_3P_4$ treffen. Der Schnittpunkt der Geraden PP_5 und QP_6 ist dann der gesuchte Standpunkt.[1]) Der gefährliche Ort für den Standpunkt besteht aus der Geraden P_5P_6 und dem Kegelschnitt, der durch die Punkte $P_1P_2P_3P_4$ und den Schnittpunkt der Geraden P_5P_6 mit der Ebene $P_1P_2P_3P_4$ bestimmt ist.

Unter der Annahme, daß die Punkte $P_1P_2P_3P_4$ in einer Horizontalebene $z = h$ liegen, bekommt man das nachstehende Formelsystem. Gegeben sind

die Objektpunkte: $P_1(x_1y_1h)$, $P_2(x_2y_2h)$, $P_3(x_3y_3h)$, $P_4(x_4y_4h)$,
$P_5(x_5y_5z_5)$, $P_6(x_6y_6z_6)$;

und die Bildpunkte: $1(\xi_1\eta_1)$, $2(\xi_2\eta_2)$, $3(\xi_3\eta_3)$, $4(\xi_4\eta_4)$, $5(\xi_5\eta_5)$, $6(\xi_6\eta_6)$.

Man berechnet:

$$(12) = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} \quad (13) = \frac{\eta_3 - \eta_1}{\xi_3 - \xi_1} \quad (14) = \frac{\eta_4 - \eta_1}{\xi_4 - \xi_1} \quad (15) = \frac{\eta_5 - \eta_1}{\xi_5 - \xi_1} \quad (16) = \frac{\eta_6 - \eta_1}{\xi_6 - \xi_1}$$

$$(23) = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\xi_3 - \xi_2} \quad (24) = \frac{\eta_4 - \eta_2}{\xi_4 - \xi_2} \quad (25) = \frac{\eta_5 - \eta_2}{\xi_5 - \xi_2} \quad (26) = \frac{\eta_6 - \eta_2}{\xi_6 - \xi_2}.$$

$$K_1 = \frac{(15) - (13)}{(15) - (14)} : \frac{(12) - (13)}{(12) - (14)} \qquad K_1' = \frac{(16) - (13)}{(16) - (14)} : \frac{(12) - (13)}{(12) - (14)}$$

$$K_2 = \frac{(25) - (23)}{(25) - (24)} : \frac{(12) - (23)}{(12) - (24)} \qquad K_2' = \frac{(26) - (23)}{(26) - (24)} : \frac{(12) - (23)}{(12) - (24)}.$$

$$(ab) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (ac) = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \quad (ad) = \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1} \quad (bc) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \quad (bd) = \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2}$$

$$\varrho_1 = \frac{(ab) - (ac)}{(ab) - (ad)} \quad (ap) = \frac{(ac) - \varrho_1 K_1 (ad)}{1 - \varrho_1 K_1} \quad (aq) = \frac{(ac) - \varrho_1 K_1' (ad)}{1 - \varrho_1 K_1'}$$

$$\sigma_2 = \frac{(ab) - (bc)}{(ab) - (bd)} \quad (bp) = \frac{(bc) - \sigma_2 K_2 (bd)}{1 - \sigma_2 K_2} \quad (bq) = \frac{(bc) - \sigma_2 K_2' (bd)}{1 - \sigma_2 K_2'}$$

$$p_1 = \frac{x_2(bp) - x_1(ap) - y_2 + y_1}{(bp) - (ap)} \qquad q_1 = \frac{x_2(bq) - x_1(aq) - y_2 + y_1}{(bq) - (aq)}$$

$$p_2 = y_1 + (ap)(p_1 - x_1) = y_2 + (bp)(p_1 - x_2)$$

$$q_2 = y_1 + (aq)(q_1 - x_1) = y_2 + (bq)(q_1 - x_2).$$

---

1) Aus dem Vorausgehenden ersieht man leicht, daß der Standpunkt schon berechnet werden kann, wenn man außer den vier in einer Ebene liegenden Punkten $P_1P_2P_3P_4$ nur noch einen Punkt außerhalb dieser Ebene kennt; der Standpunkt ist der Schnittpunkt eines Kreises mit einer Geraden.

$$(p5) = \frac{p_2 - y_5}{p_1 - x_5} \quad (q6) = \frac{q_2 - y_6}{q_1 - x_6} \quad x_0 = \frac{q_1(q6) - p_1(p5) + p_2 - q_2}{(q6) - (p5)}$$

$$y_0 = p_2 + (x_0 - p_1)(p5) = q_2 + (x_0 - q_1)(q6)$$

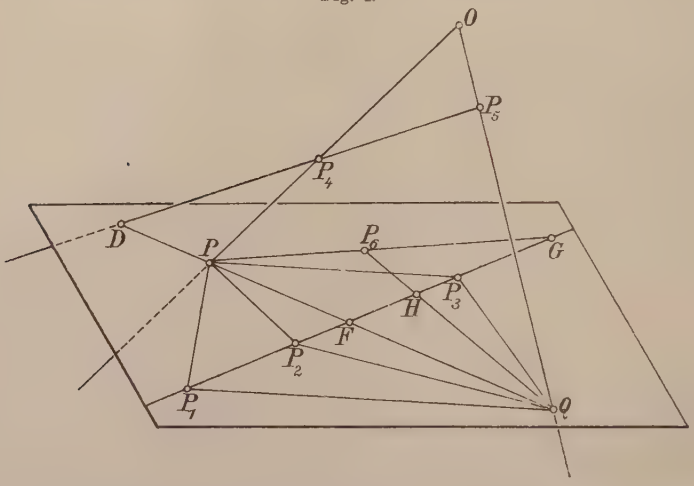
$$z_0 = h + \frac{(z_5 - h)(x_0 - p_1)}{x_5 - p_1} = h + \frac{(z_5 - h)(y_0 - p_2)}{y_5 - p_2} = h + \frac{(z_6 - h)(x_0 - q_1)}{x_6 - q_1}$$

$$= h + \frac{(z_6 - h)(y_0 - q_2)}{y_6 - q_2}.$$

$x_0 y_0 z_0$ sind die Koordinaten des Standpunktes.

Endlich möge die Lösung auch noch angedeutet werden für den Fall, daß 3 Objektpunkte $P_1 P_2 P_3$ in einer Geraden liegen. Man denkt

Fig. 4.



sich wie im allgemeinen Fall die Punkte P_4 und P_5 mit dem Standpunkt O verbunden und sucht zuerst die Schnittpunkte P und Q der Geraden $P_4 O$ und $P_5 O$ mit der Ebene $P_1 P_2 P_3 P_6$.

Man berechnet

$$\text{Punkt } F \text{ aus } (P_1 P_2 P_3 F) = \begin{cases} P(P_1 P_2 P_3 D) = 4(1, 2, 3, 5) \\ Q(P_1 P_2 P_3 D) = 5(1, 2, 3, 4), \end{cases}$$

$$\text{Punkt } G \text{ aus } (P_1 P_2 P_3 G) = P(P_1 P_2 P_3 P_6) = 4(1, 2, 3, 6),$$

$$\text{Punkt } H \text{ aus } (P_1 P_2 P_3 H) = Q(P_1 P_2 P_3 P_6) = 5(1, 2, 3, 6).$$

Dann bestimmen

Gerade DF und $P_6 G$ den Punkt P,

Gerade DF und $P_6 H$ den Punkt Q,

Gerade PP_4 und QP_5 den Standpunkt O.

Statt die ganze Rechnung in der Ebene $P_1 P_2 P_3 P_6$ auszuführen, löst man die Aufgabe zunächst im Grundriß, worauf die dritten Koordinaten von P, Q und O sich ohne Schwierigkeit ergeben.

Die beiden Kegel, welche den gefährlichen Ort bestimmen, zerfallen in die Ebenenpaare $P_1 P_2 P_3 P_4$, $P_4 P_5 P_6$ und $P_1 P_2 P_3 P_5$, $P_4 P_5 P_6$; der gefährliche Ort ist also die gemeinsame Ebene $P_4 P_5 P_6$.

4. Ausgleichung des Standpunktes.

Aus dem Vorausgehenden ergibt sich, daß es stets möglich ist, durch 6 allgemein gewählte Raumpunkte ein Strahlenbündel so zu legen, daß die Strahlen des Bündels gegebene Doppelverhältnises miteinander bilden.[1]) Sind mehr als 6 Punkte im Raum gegeben, so ist es im allgemeinen nicht mehr möglich, ein Strahlenbündel mit gegebenen Doppelverhältnissen genau durch die Punkte hindurchzulegen. Es entsteht dann die Aufgabe, den aus 6 Punkten gefundenen Näherungsort des Bündelmittelpunkts mit Beibehaltung der Doppelverhältnisse so zu verändern, daß ein möglichst genaues Einpassen des Strahlenbündels in den Haufen der Fixpunkte erzielt wird. Am zweckmäßigsten wird es in der Regel sein, die Summe der Quadrate der Abstände der Fixpunkte von den zugehörigen Strahlen zu einem Minimum zu machen.

Vollkommen systematisch läßt sich diese Ausgleichung in folgender Weise durchführen: Damit die Doppelverhältnisse im Strahlenbündel dieselben werden wie in der Bildebene, sucht man das Strahlenbündel und die Bildebene kollinear aufeinander zu beziehen. Dazu sind 4 Strahlen und die zugehörigen Bildpunkte notwendig. Man verbindet also den Näherungsstandpunkt mit 4 Objektpunkten und schneidet dieses Bündel mit einer beliebigen Ebene, z. B. mit der Ebene $x = 0$. Die Schnittpunkte haben die Koordinaten $Y_i Z_i$, die entsprechenden Bildpunkte die Koordinaten $\xi_i \eta_i$. Setzt man nun

$$Y_i = \frac{a_{11}\xi_i + a_{12}\eta_i + a_{13}}{a_{31}\xi_i + a_{32}\eta_i + 1} \qquad Z_i = \frac{a_{21}\xi_i + a_{22}\eta_i + a_{23}}{a_{31}\xi_i + a_{32}\eta_i + 1} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

so lassen sich aus diesen 8 Gleichungen die 8 Unbekannten a_{ik} berechnen. Sind die Koeffizienten a_{ik} gefunden, so kann man aus den Koordinaten $\xi_i \eta_i$ aller übrigen zur Verfügung stehenden Bildpunkte die zugehörigen $Y_i Z_i$ berechnen. Verbindet man jetzt die in der Ebene $x = 0$ liegenden Punkte $Y_i Z_i$ mit dem Näherungsstandpunkt, so werden nur die zur Berechnung der a_{ik} verwendeten Strahlen durch ihre entsprechenden Fixpunkte hindurchgehen, die andern aber nicht.

1) Voraussetzung ist dabei nur, daß die Doppelverhältnisse aus einer wirklichen oder abgeleiteten Perspektive des räumlichen Punkthaufens entnommen werden.

Man hat nun sowohl die Koordinaten des Standpunktes als auch die Koeffizienten a_{ik} so zu verändern, daß die Summe der Quadrate der Abstände der Fixpunkte von den zugehörigen Strahlen zu einem Minimum wird.

An Stelle dieser etwas weitläufigen Ausgleichung mit 11 Unbekannten wird im nachfolgenden Zahlenbeispiel von einer andern Gebrauch gemacht, die insofern nicht mehr systematisch ist, als 4 Strahlen des Bündels stets durch ihre entsprechenden Fixpunkte hindurchgehend angenommen werden. Dafür hat diese Methode den Vorteil, daß sie nur 3 Unbekannte, nämlich die Verschiebung des Standpunktes, enthält.

Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ die Vektoren vom Näherungsstandpunkt nach 4 passend gewählten Objektpunkten, und 1, 2, 3, 4 die zugehörigen Bildpunkte. Man betrachtet nun die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ als Achsen zweier Ebenenbüschel, die zu den Strahlenbüscheln $1\,(2, 3, 4, \ldots i \ldots)$ bezw. $2\,(1, 3, 4, \ldots i \ldots)$ in der Bildebene projektiv sind. Da irgend ein Punkt i der Bildebene durch zwei Doppelverhältnisse $k_i = 1\,(2, 3, 4, i)$ und $k_i' = 2\,(1, 3, 4, i)$ eindeutig bestimmt ist, so läßt sich aus k_i und k_i' auch die Richtung $\mathfrak{s}_i$ des dem Bildpunkt i entsprechenden Strahles berechnen; man braucht nur diejenigen zwei Ebenen der Büschel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zum Schnitt zu bringen, welche mit den Ebenen $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{AC}$, $\mathfrak{AD}$ bezw. $\mathfrak{BA}$, $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{BD}$ die Doppelverhältnisse k_i bezw. k_i' bilden.

Die Ebenen des Büschels $\mathfrak{A}$ sind dargestellt durch die Bivektoren $[\mathfrak{AB}]$, $[\mathfrak{AC}]$, $[\mathfrak{AD}]$; der letzte Bivektor muß eine lineare Verbindung der beiden ersten sein, also

$$[\mathfrak{AB}] + \lambda\,[\mathfrak{AC}] = \varrho\,[\mathfrak{AD}].$$

Ebenso im Büschel $\mathfrak{B}$

$$[\mathfrak{BA}] + \lambda'\,[\mathfrak{BC}] = \varrho'\,[\mathfrak{BD}].$$

Zur Bestimmung von λ und λ' braucht man nur mit $\mathfrak{D}$ zu multiplizieren; es wird dann:

$$\lambda = \frac{[\mathfrak{DAB}]}{[\mathfrak{DCA}]}; \quad \lambda' = \frac{[\mathfrak{DAB}]}{[\mathfrak{DBC}]}.$$

Die Ebenen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{s}_i$ und $\mathfrak{B}\,\mathfrak{s}_i$ können in entsprechender Weise dargestellt werden durch

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] + \mu_i\,[\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}] + \mu_i'\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}].$$

Die Parameter μ_i und μ_i' sind bestimmt durch

$$\frac{\lambda}{\mu_i} = k_i, \quad \frac{\lambda'}{\mu_i'} = k_i'; \quad \text{d. h.:} \quad \mu_i = \frac{\lambda}{k_i}, \quad \mu_i' = \frac{\lambda'}{k_i'}.$$

Der Vektor $\mathfrak{s}_i$ in der Schnittlinie der Ebenen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{s}_i$ und $\mathfrak{B}\,\mathfrak{s}_i$ ist, abgesehen von der Länge und dem Richtungssinn dargestellt durch das Produkt $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{s}_i][\mathfrak{B}\,\mathfrak{s}_i]$, d. h.:

$$\left[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} + \frac{\lambda}{k_i}\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\right]\left[\mathfrak{B}\,\mathfrak{A} + \frac{\lambda'}{k_i'}\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\right],$$

oder da bekanntlich $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]\mathfrak{B}$ ist und es auf den Zahlfaktor $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]$ nicht ankommt:

$$S_i\mathfrak{s}_i = \pm\left(\frac{\lambda}{k_i}\mathfrak{A} + \frac{\lambda'}{k_i'}\mathfrak{B} + \frac{\lambda\lambda'}{k_i k_i'}\mathfrak{C}\right).$$

Die aus den Doppelverhältnissen der Bildpunkte berechneten Strahlen $\mathfrak{s}_i$ werden im allgemeinen nicht durch die entsprechenden Fixpunkte P_i hindurchgehen. Verschiebt man den Standpunkt so, daß die Grundstrahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ auch nach der Verschiebung noch durch die entsprechenden Objektpunkte $P_1P_2P_3P_4$ gehen, und behält man außerdem die Doppelverhältnisse k_i und k_i' bei, so gehen die Vektoren $\mathfrak{s}_i$ in neue Vektoren $\mathfrak{s}_i'$ über. Die Verschiebung des Standpunktes ist nun so zu wählen, daß die Summe der Quadrate der Abstände der P_i von den Strahlen $\mathfrak{s}_i'$ ein Minimum wird.

Bezeichnet man die Veränderung des Standpunktes mit $\mathfrak{X}$, so gehen die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ über in $\mathfrak{A}-\mathfrak{X}$, $\mathfrak{B}-\mathfrak{X}$, $\mathfrak{C}-\mathfrak{X}$, $\mathfrak{D}-\mathfrak{X}$; die Parameten λ und λ' werden zu $\lambda(1+\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{T})$ und $\lambda'(1+\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{T}')$, wobei

$$\mathfrak{T} = \frac{|\,\mathfrak{D}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})+|\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{[\mathfrak{D}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}]} - \frac{|\,\mathfrak{D}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})+|\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{[\mathfrak{D}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]};$$

$$\mathfrak{T}' = \frac{|\,\mathfrak{D}(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})+|\,\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{[\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]} - \frac{|\,\mathfrak{D}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})+|\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{[\mathfrak{D}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]}.$$

Endlich wird

$$\mathfrak{s}_i' = \mathfrak{s}_i - \frac{1}{S_i}\left(\frac{\lambda}{k_i} + \frac{\lambda'}{k_i'} + \frac{\lambda\lambda'}{k_i k_i'}\right)\mathfrak{X} \pm \frac{1}{S_i}\left\{\mathfrak{T}\,|\,\mathfrak{X}\,\frac{\lambda}{k_i}\,\mathfrak{A} + \mathfrak{T}'|\mathfrak{X}\,\frac{\lambda'}{k_i'}\,\mathfrak{B} + (\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')|\mathfrak{X}\,\frac{\lambda\lambda'}{k_i k_i'}\,\mathfrak{C}\right\}.$$

Sind $\mathfrak{R}_i$ die Vektoren vom Näherungsstandpunkt nach den überzähligen Fixpunkten, und $\mathfrak{F}_i$ die senkrechten Abstände der Fixpunkte von den $\mathfrak{s}_i'$, so wird

$$\mathfrak{R}_i - \mathfrak{X} + \mathfrak{F}_i = \sqrt{(\mathfrak{R}_i - \mathfrak{X})^2}\,\mathfrak{s}_i',$$

oder mit Vernachlässigung von Gliedern II. Ordnung:

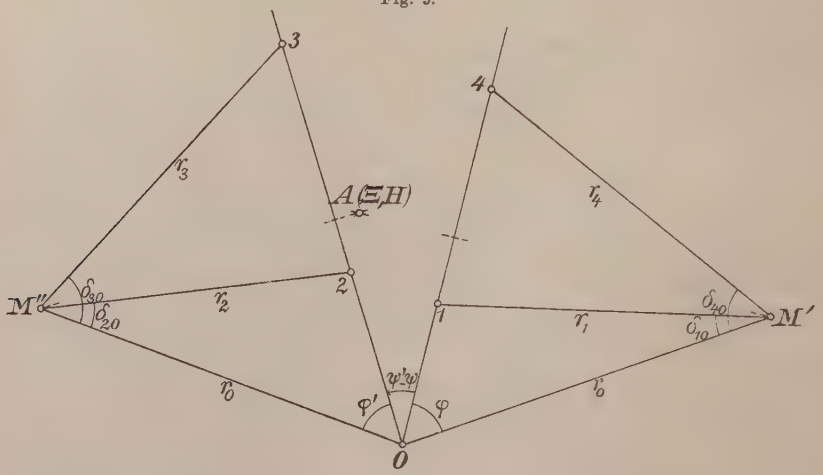
$$\mathfrak{F}_i = R_i\mathfrak{s}_i' - \mathfrak{R}_i + \mathfrak{X} - (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{s}_i)\,\mathfrak{s}_i, \quad \text{wobei } R_i = |\,\mathfrak{R}_i\,|.$$

Diese Fehlergleichung in Vektorform zerfällt in drei Fehlergleichungen zwischen den Koordinaten. Stehen im ganzen n Objektpunkte und ihre Bilder zur Verfügung, so erhält man also $3(n-4)$ Fehlergleichungen. Aus diesen sind in üblicher Weise die Normalgleichungen zu bilden und aufzulösen.

5. Bestimmung der inneren Orientierung.

Nachdem man die Lage des Standpunktes O' gegenüber dem Objekt gefunden hat, ist die Bestimmung der inneren Orientierung lediglich ein Rückwärtseinschneiden im Raum. Es handelt sich nämlich um die Aufgabe: In der Bildebene ist eine Reihe von Punkten gegeben durch die Koordinaten in einem rechtwinkligen System i′j′; gesucht ist im Bildraum i′j′f′ ein Punkt M mit den Koordinaten ΞHD von der Eigenschaft, daß das Strahlenbündel von M nach den Bildpunkten kongruent wird zum Strahlenbündel vom Standpunkt O' nach den Fixpunkten P_i im Objektraum ijf. Ξ und H sind die Koordinaten des Hauptpunktes A, D ist die Bildweite. Zur Berechnung von ΞHD ist die Kenntnis von 3 Punkten im Bildraum und den zugehörigen

Fig. 5.



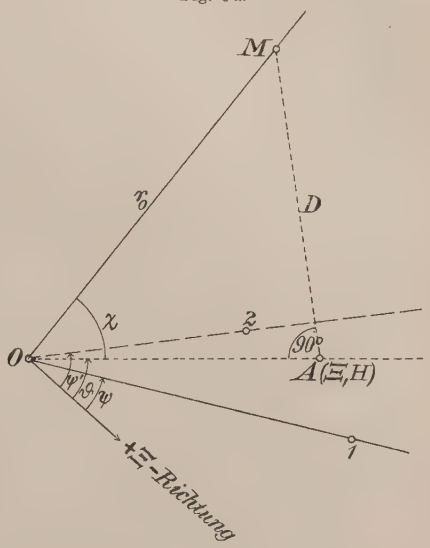
Strahlen im Objektraum notwendig; die analytische Lösung führt auf eine Gleichung 4. Grades und ist daher ziemlich langwierig.[1]) Da nun zur Bestimmung des Standpunktes schon 6 Punkte notwendig waren und die Berechnung von ΞHD vorläufig nur die Bedeutung einer Näherungslösung hat, so erscheint es wohl gerechtfertigt, noch einen vierten Punkt in die Rechnung mit einzubeziehen. Die Aufgabe wird dadurch zwar überbestimmt, die Lösung dafür aber eindeutig und erheblich einfacher: sie läßt sich dann zurückführen auf ein zweimaliges Rückwärtseinschneiden in der Ebene.[2])

1) S. Finsterwalder und W. Scheufele, Das Rückwärtseinschneiden im Raum. Sitzungsberichte d. K. Bayer. Akademie der Wissenschaften. München 1903. S. 591—614.

2) Zur graphischen Lösung bereits angewendet in S. Finsterwalder, Die geometrischen Grundlagen usw. S. 31.

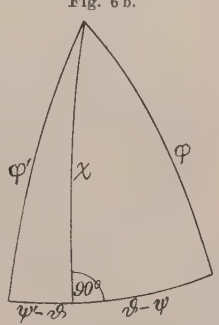
Es seien $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4$ die Richtungen von vier Strahlen im Objektraum $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$; am bequemsten nimmt man gleich die Einheitsvektoren der bei der Ausgleichung des Standpunktes benützten Grundstrahlen $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \mathfrak{X}$, $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - \mathfrak{X}$, $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C} - \mathfrak{X}$, $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} - \mathfrak{X}$. Man sucht dann zunächst die Richtung $\mathfrak{a}_0$ der Geraden, in welcher sich die Ebenen $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_4$ und $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$ schneiden. Die den Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_i$ entsprechenden Punkte in der Bildebene $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'$ mögen wieder kurz mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet werden, ihre Koordinaten mit $\xi_i \eta_i$. Dem Strahl $\mathfrak{a}_0$ entspricht der Schnittpunkt $0\,(\xi_0 \eta_0)$ der Geraden (14) und (23).

Fig. 6a.



Jetzt denkt man sich den optischen Mittelpunkt M gefunden und legt die Ebenen $M(014)$ und $M(023)$ in die Bildebene um. Die Umlegungen M' und M'' können durch Rückwärtseinschneiden nach den bekannten Punkten 014 bezw. 023 leicht bestimmt werden, da ja die Winkel δ_{ik} bei M' und M'' aus dem Bündel der $\mathfrak{a}_i$ entnommen werden können. Man braucht jedoch nicht die Koordinaten der Punkte M' und M'' selbst, sondern nur die Winkel φ und φ', welche die Gerade $M0$ mit den Geraden 01 bezw. 02 einschließt, sowie die Entfernungen $r_0 r_1 r_2$ des Punktes M von den Bildpunkten 012. Man betrachtet nunmehr das Dreikant, das gebildet wird von den Strahlen $0M$, 01 und 02. Von diesem Dreikant kennt man die drei Seiten φ, φ' und $\psi' - \psi$, wenn man mit ψ und ψ' die Richtungen der Strahlen 01 und 02 bezeichnet. Infolgedessen lassen sich nach bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie sowohl die Richtung ϑ des Strahles $0A$ als auch die Neigung χ der Geraden $0M$ gegen die Bildebene berechnen. Daraus findet man dann leicht D, Ξ, H.

Fig. 6b.



Man erhält folgendes Formelsystem:

Gegeben sind die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4$, sowie die Bildpunkte

$$1\,(\xi_1 \eta_1), \quad 2\,(\xi_2 \eta_2), \quad 3\,(\xi_3 \eta_3), \quad 4\,(\xi_4 \eta_4).$$

Man berechnet der Reihe nach:

$$\mathcal{A} = -\frac{[\mathfrak{D}'\mathfrak{A}'\mathfrak{B}']}{[\mathfrak{D}'\mathfrak{A}'\mathfrak{C}']} = \lambda(1 + \mathfrak{X}|\mathfrak{T}); \quad \mathfrak{a}_0 = \pm\frac{\mathfrak{B}' + \mathcal{A}\mathfrak{C}'}{|\mathfrak{B}' + \mathcal{A}\mathfrak{C}'|}.$$

$$(14) = \frac{\eta_1 - \eta_4}{\xi_1 - \xi_4} \qquad \tau = \frac{\eta_1 - \eta_2 - (14)(\xi_1 - \xi_2)}{\eta_1 - \eta_3 - (14)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{\eta_4 - \eta_2 - (14)(\xi_4 - \xi_2)}{\eta_4 - \eta_3 - (14)(\xi_4 - \xi_3)}$$

$$\xi_0 = \frac{\xi_2 - \tau\xi_3}{1 - \tau} \qquad \eta_0 = \frac{\eta_2 - \tau\eta_3}{1 - \tau}.$$

$\cos\delta_{10} = \mathfrak{a}_1|\mathfrak{a}_0$ $\cos\delta_{20} = \mathfrak{a}_2|\mathfrak{a}_0$ $\cos\delta_{14} = \mathfrak{a}_1|\mathfrak{a}_4$; Probe: $\delta_{14} = \pm(\delta_{10} \pm \delta_{40})$

$\cos\delta_{40} = \mathfrak{a}_4|\mathfrak{a}_0$ $\cos\delta_{30} = \mathfrak{a}_3|\mathfrak{a}_0$ $\cos\delta_{23} = \mathfrak{a}_2|\mathfrak{a}_3$; $\delta_{23} = \pm(\delta_{20} \pm \delta_{30})$.

$$\operatorname{tg}\omega = \left|\frac{\xi_0 - \xi_4}{\xi_1 - \xi_4}\right| \frac{\sin\delta_{14}}{\sin\delta_{40}} = \left|\frac{\eta_0 - \eta_4}{\eta_1 - \eta_4}\right| \frac{\sin\delta_{14}}{\sin\delta_{40}};$$

$$\operatorname{tg}\omega' = \left|\frac{\xi_0 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3}\right| \frac{\sin\delta_{23}}{\sin\delta_{30}} = \left|\frac{\eta_0 - \eta_3}{\eta_2 - \eta_3}\right| \frac{\sin\delta_{23}}{\sin\delta_{30}}.$$

$$\operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\delta_{10}}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\delta_{10}}{2}\operatorname{cotg}(\omega - 45^0); \quad \operatorname{tg}\left(\varphi' + \frac{\delta_{20}}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\delta_{20}}{2}\operatorname{cotg}(\omega' - 45^0);$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\eta_1 - \eta_0}{\xi_1 - \xi_0} \quad \operatorname{tg}\psi' = \frac{\eta_2 - \eta_0}{\xi_2 - \xi_0} \left(0 \leqq \begin{Bmatrix}\psi\\ \psi'\end{Bmatrix} < 360^0\right).$$

$$r_0 = \frac{(\xi_1 - \xi_0)\sin(\varphi + \delta_{10})}{\cos\psi\sin\delta_{10}} = \frac{(\xi_2 - \xi_0)\sin(\varphi' + \delta_{20})}{\cos\psi'\sin\delta_{20}}; \quad r_1 = r_0\operatorname{cotg}\omega;$$

$$r_0 = \frac{(\eta_1 - \eta_0)\sin(\varphi + \delta_{10})}{\sin\psi\sin\delta_{10}} = \frac{(\eta_2 - \eta_0)\sin(\varphi' + \delta_{20})}{\sin\psi'\sin\delta_{20}}; \quad r_2 = r_0\operatorname{cotg}\omega'.$$

$$\operatorname{cotg}\left(\vartheta - \frac{\psi + \psi'}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\psi' - \psi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\varphi + \varphi'}{2}\operatorname{cotg}\frac{\varphi - \varphi'}{2};$$

$$\cos\chi = \frac{\cos\varphi}{\cos(\vartheta - \psi)} = \frac{\cos\varphi'}{\cos(\psi' - \vartheta)};$$

$$D = r_0\sin\chi; \quad \Xi = \xi_0 + r_0\cos\chi\cos\vartheta; \quad H = \eta_0 + r_0\cos\chi\sin\vartheta.$$

Ξ, H sind die Koordinaten des Hauptpunktes A; D ist die Bildweite.

Um die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{j}'$ durch die $\mathfrak{ijf}$ auszudrücken, findet man sofort aus der räumlichen Anschauung:

$$(\xi_1 - \xi_0)\,\mathfrak{i}' + (\eta_1 - \eta_0)\,\mathfrak{j}' = r_1\mathfrak{a}_1 - r_0\mathfrak{a}_0$$
$$(\xi_2 - \xi_0)\,\mathfrak{i}' + (\eta_2 - \eta_0)\,\mathfrak{j}' = r_2\mathfrak{a}_2 - r_0\mathfrak{a}_0.$$

Folglich:

$$\mathfrak{i}'(\operatorname{cotg}\psi - \operatorname{cotg}\psi') = \frac{r_1\mathfrak{a}_1 - r_0\mathfrak{a}_0}{\eta_1 - \eta_0} - \frac{r_2\mathfrak{a}_2 - r_0\mathfrak{a}_0}{\eta_2 - \eta_0}$$

$$\mathfrak{j}'(\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\psi') = \frac{r_1\mathfrak{a}_1 - r_0\mathfrak{a}_0}{\xi_1 - \xi_0} - \frac{r_2\mathfrak{a}_2 - r_0\mathfrak{a}_0}{\xi_2 - \xi_0}.$$

Die hieraus berechneten Vektoren $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{j}'$ werden im allgemeinen weder genau rechtwinklig zueinander stehen, noch auch genau die Länge 1 haben; sie sind daher in geeigneter Weise zu verbessern. Schließlich erhält man auch $\mathfrak{f}'$ aus $\mathfrak{f}' = |\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'$; die Richtung der optischen Achse ist $-\mathfrak{f}'$.

6. Ausgleichung der inneren Orientierung.

Verbindet man den Standpunkt O' mit allen Objektpunkten P_i, so erhält man ein Strahlenbündel, dessen Einheitsvektoren mit $\mathfrak{g}_i$ bezeichnet sein sollen. In gleicher Weise erhält man im Bildraum ein Strahlenbündel $\mathfrak{h}_i$, wenn man vom optischen Mittelpunkt M aus die Strahlen nach den Bildpunkten i zieht. Diese beiden Strahlenbündel $\mathfrak{g}_i$ und $\mathfrak{h}_i$ werden aber nicht vollständig kongruent sein. Man sucht nun eine bessere Übereinstimmung beider Bündel dadurch zu erzielen, daß man das Bündel $\mathfrak{h}_i$ sowohl durch eine kleine Verschiebung des Mittelpunktes M als auch durch eine kleine Drehung des ganzen Bündels verändert. Am besten nimmt man diese Veränderung so vor, daß die Summe der Quadrate der Abstände, welche die Endpunkte entsprechender Vektoren $\mathfrak{h}_i$ und $\mathfrak{g}_i$ voneinander besitzen, möglichst klein wird. Dazu muß man sich allerdings erst die Mittelpunkte der beiden Bündel zur Deckung gebracht und die Vektoren $\mathfrak{g}_i$ in das Koordinatensystem des Bildraumes $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ umgerechnet denken.

Bezeichnet man den Vektor vom Anfangspunkt des Systems $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ nach dem perspektivischen Zentrum M mit $\mathfrak{M}$ und die Vektoren nach den Bildpunkten mit $\mathfrak{B}_i$, so ist

$$\mathfrak{h}_i = \frac{\mathfrak{B}_i - \mathfrak{M}}{|\mathfrak{B}_i - \mathfrak{M}|} = \frac{\mathfrak{B}_i - \mathfrak{M}}{r_i} = \frac{\xi_i - \Xi}{r_i}\mathfrak{i}' + \frac{\eta_i - H}{r_i}\mathfrak{j}' + \frac{-D}{r_i}\mathfrak{k}';$$

r_i ist die Entfernung des Punktes M vom Bildpunkte i. Erteilt man jetzt dem Punkt M eine kleine Verschiebung $\mathfrak{Y}$, so gehen die Vektoren $\mathfrak{h}_i$ über in

$$\frac{\mathfrak{B}_i - \mathfrak{M} - \mathfrak{Y}}{|\mathfrak{B}_i - \mathfrak{M} - \mathfrak{Y}|} = \mathfrak{h}_i - \frac{\mathfrak{Y}}{r_i} + \left(\frac{\mathfrak{Y}}{r_i}\,|\,\mathfrak{h}_i\right)\mathfrak{h}_i.$$

Wird dieses Bündel in seiner Gesamtheit der Drehung $\mathfrak{U}$ unterworfen, so resultiert das neue Bündel

$$\mathfrak{h}_i' = \left\{\mathfrak{h}_i - \frac{\mathfrak{Y}}{r_i} + \left(\frac{\mathfrak{Y}}{r_i}\,|\,\mathfrak{h}_i\right)\mathfrak{h}_i\right\} + |\,\mathfrak{U}\left\{\mathfrak{h}_i - \frac{\mathfrak{Y}}{r_i} + \left(\frac{\mathfrak{Y}}{r_i}\,|\,\mathfrak{h}_i\right)\mathfrak{h}_i\right\}$$

$$= \mathfrak{h}_i - \frac{\mathfrak{Y}}{r_i} + \left(\frac{\mathfrak{Y}}{r_i}\,|\,\mathfrak{h}_i\right)\mathfrak{h}_i + |\,\mathfrak{U}\mathfrak{h}_i.$$

Der Unterschied der Vektoren $\mathfrak{g}_i$ und $\mathfrak{h}_i'$ ist daher

$$\mathfrak{F}_i = \mathfrak{g}_i - \mathfrak{h}_i + \frac{\mathfrak{Y}}{r_i} - \left(\frac{\mathfrak{Y}}{r_i}\,|\,\mathfrak{h}_i\right)\mathfrak{h}_i - |\,\mathfrak{U}\mathfrak{h}_i.$$

Setzt man

$$\mathfrak{Y} = Y_1\mathfrak{i}' + Y_2\mathfrak{j}' + Y_3\mathfrak{k}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{U} = U_1\mathfrak{i}' + U_2\mathfrak{j}' + U_3\mathfrak{k}',$$

so erhält man aus der obenstehenden Fehlergleichung in Vektorform drei Fehlergleichungen zwischen den Koordinaten, nämlich

$$\mathfrak{F}|\mathfrak{i}' = -\frac{Y_1}{r}\left[1-\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\right)^2\right] - \frac{Y_2}{r}\cdot\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{\eta-H}{r} - \frac{Y_3}{r}\cdot\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{-D}{r} \quad -U_2\frac{-D}{r} + U_3\frac{\eta-H}{r} + \mathfrak{g}|\mathfrak{i}' - \frac{\xi-\Xi}{r}$$

$$\mathfrak{F}|\mathfrak{j}' = -\frac{Y_1}{r}\cdot\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{\eta-H}{r} + \frac{Y_2}{r}\left[1-\left(\frac{\eta-H}{r}\right)^2\right] - \frac{Y_3}{r}\cdot\frac{\eta-H}{r}\cdot\frac{-D}{r} + U_1\cdot\frac{-D}{r} \quad -U_3\frac{\xi-\Xi}{r} + \mathfrak{g}|\mathfrak{j}' - \frac{\eta-H}{r}$$

$$\mathfrak{F}|\mathfrak{k}' = -\frac{Y_1}{r}\cdot\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{-D}{r} - \frac{Y_2}{r}\frac{\eta-H}{r}\cdot\frac{-D}{r} + \frac{Y_3}{r}\left[1-\left(\frac{-D}{r}\right)^2\right] - U_1\frac{\eta-H}{r} + U_2\frac{\xi-\Xi}{r} \quad +\mathfrak{g}|\mathfrak{k}' - \frac{-D}{r}$$

Auch das Koeffizientenschema der Normalgleichungen läßt sich noch leicht allgemein anschreiben. Es wird:

$$[aa] = \sum\frac{1}{r^2}\left[1-\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\right)^2\right] \qquad [bb] = \sum\frac{1}{r^2}\left[1-\left(\frac{\eta-H}{r}\right)^2\right] \qquad [cc] = \sum\frac{1}{r^2}\left[1-\left(\frac{-D}{r}\right)^2\right];$$

$$[dd] = \sum\left[1-\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\right)^2\right] \qquad [ee] = \sum\left[1-\left(\frac{\eta-H}{r}\right)^2\right] \qquad [ff] = \sum\left[1-\left(\frac{-D}{r}\right)^2\right].$$

$$[gg] = \sum\left[\left(\mathfrak{g}|\mathfrak{i}' - \frac{\xi-\Xi}{r}\right)^2 + \left(\mathfrak{g}|\mathfrak{j}' - \frac{\eta-H}{r}\right)^2 + \left(\mathfrak{g}|\mathfrak{k}' - \frac{-D}{r}\right)^2\right]$$

$$= 2\sum\left[1-\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{i}' + \frac{\eta-H}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{j}' + \frac{-D}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{k}'\right]\right.$$

$$[ab] = -\sum\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{\eta-H}{r} \qquad [ac] = -\sum\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{-D}{r} \qquad [bc] = -\sum\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\eta-H}{r}\cdot\frac{-D}{r}$$

$$[de] = -\sum\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{\eta-H}{r} \qquad [df] = -\sum\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{-D}{r} \qquad [ef] = -\sum\frac{\eta-H}{r}\cdot\frac{-D}{r}.$$

$$[ad] = 0 \qquad [bd] = +\sum\frac{1}{r}\cdot\frac{-D}{r} \qquad [cd] = -\sum\frac{1}{r}\cdot\frac{\eta-H}{r}$$

$$[ae] = -\sum\frac{1}{r}\cdot\frac{-D}{r} \qquad [be] = 0 \qquad [ce] = +\sum\frac{1}{r}\frac{\xi-\Xi}{r}$$

$$[af] = +\sum\frac{1}{r}\cdot\frac{\eta-H}{r} \qquad [bf] = -\sum\frac{1}{r}\cdot\frac{\xi-\Xi}{r} \qquad [cf] = 0.$$

$$[ag] = \sum\frac{1}{r}\left[\mathfrak{g}|\mathfrak{i}' - \frac{\xi-\Xi}{r}\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{i}' + \frac{\eta-H}{r}\mathfrak{g}\,\mathfrak{j}' + \frac{-D}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{k}'\right)\right]$$

$$[bg] = \sum\frac{1}{r}\left[\mathfrak{g}|\mathfrak{j}' - \frac{\eta-H}{r}\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\mathfrak{g}\,\mathfrak{i}' + \frac{\eta-H}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{j}' + \frac{-D}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{k}'\right)\right]$$

$$[cg] = \sum\frac{1}{r}\left[\mathfrak{g}|\mathfrak{k}' - \frac{-D}{r}\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{i}' + \frac{\eta-H}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{j}' + \frac{-D}{r}\mathfrak{g}\,\mathfrak{k}'\right)\right]$$

$$[dg] = \sum\left(\frac{-D}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{i}' - \frac{\eta-H}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{k}'\right)$$

$$[eg] = \sum\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{k}' - \frac{-D}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{i}'\right)$$

$$[fg] = \sum\left(\frac{\eta-H}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{i}' - \frac{\xi-\Xi}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{i}'\right).$$

7. Numerisches Beispiel.

Die Koordinaten aller zur Rechnung benützten Punkte sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt. Die Koordinaten der Bildpunkte sind bezogen auf ein willkürlich angenommenes rechtwinkliges System ξ, η; die Koordinaten x, y, z der zugehörigen Fixpunkte wurden der Originalkarte des Herrn Dr. S. Finsterwalder entnommen; hierbei sind die z-Koordinaten bereits in bezug auf Erdkrümmung und mittlere Refraktion verbessert. Die Koordinaten der Objektpunkte sind in m, die Koordinaten der Bildpunkte in mm gemessen.

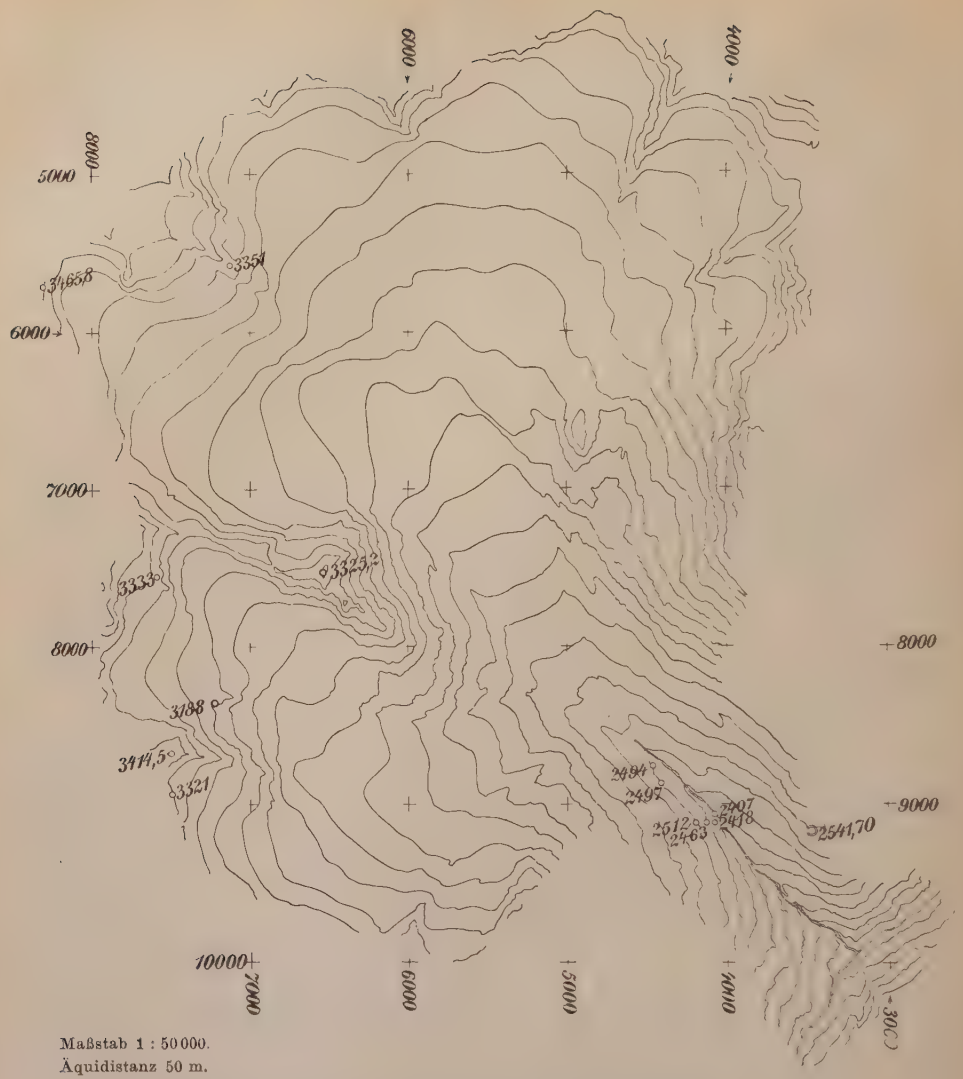
Nummer	Objektpunkte			Bildpunkte		
	x	y	z	ξ	η	
1 △	6533,2	7527,2	3324,5	23,05	65,75	Hintergraslspitze;
2	4083,0	9062,0	2407,0	— 80,90	— 84,00	Felsen am Bachufer;
3	7505,0	8937,0	3320,0	— 117,55	54,75	Felsgipfel südl. d. Kesselwandsp.
4 △	8308,9	5704,1	3463,5	64,70	46,40	Schwarzwandspitze;
5	7123,5	5573,0	3349,3	117,95	51,30	Felsgipfel südöstl. d. Hochvernagtsp.
6	4125,5	9118,0	2463,0	— 112,10	— 52,80	Fels auf d. rechten Seite des Vernagtgrabens;
7	4193,0	9122,5	2512,0	— 117,25	— 24,30	„ ;
8	4460,0	8765,0	2493,9	— 6,40	— 21,50	„ ;
9	7590,0	7557,5	3331,7	— 14,85	49,90	Felskuppe östl. vom Fluchtkogl;
10 △	7503,2	8675,6	3413,5	— 95,20	61,15	Kesselwandspitze;
11	4406,0	8869,0	2496,9	— 32,25	— 22,60	Fels auf d. rechten Seite des Vernagtgrabens;
12	4074,0	9120,0	2418,0	— 111,50	— 83,40	„ ;
13	7216,0	8354,0	3187,1	— 64,05	+ 46,00	Felsgipfel nordöstl. d. Kesselwandspitze.

Der Näherungsstandpunkt wurde bestimmt mit Hilfe der Punkte 4, 5, 11, 10, 7, 3. Es ergab sich

$$x_0 = 3473{,}2 \qquad y_0 = 9169{,}7 \qquad z_0 = 2541{,}5.$$

Für die Ausgleichung des Standpunktes wurden die Punkte 1, 2, 3, 4 als Grundpunkte angenommen; die Grundstrahlen des Bündels im Objektraum sind daher (Einheit = 1 km):

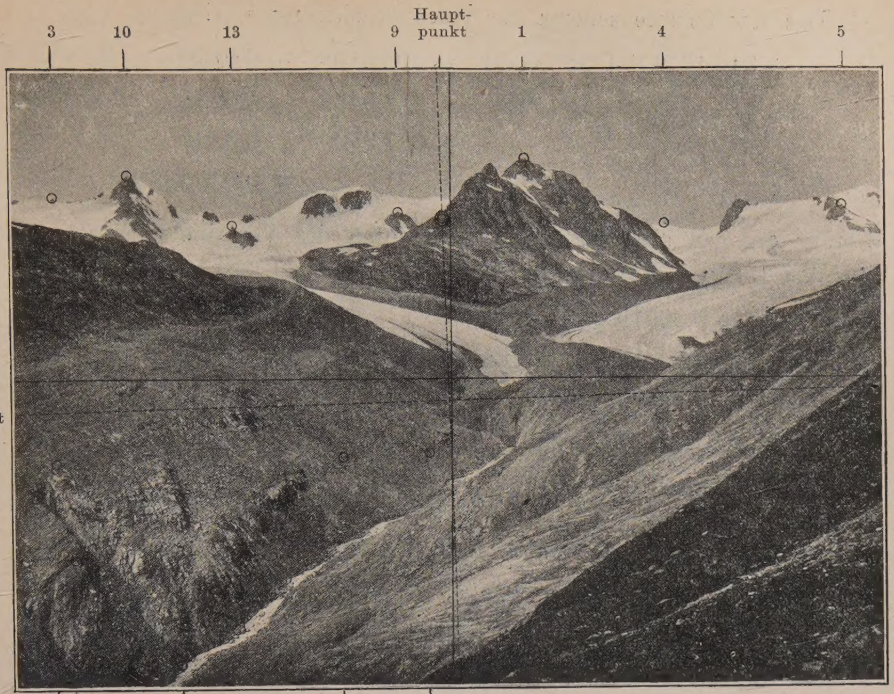
$$\mathfrak{A} = 3{,}0600\,\mathfrak{i} - 1{,}6425\,\mathfrak{j} + 0{,}7830\,\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{B} = 0{,}6098\,\mathfrak{i} - 0{,}1077\,\mathfrak{j} - 0{,}1345\,\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{C} = 4{,}0318\,\mathfrak{i} - 0{,}2327\,\mathfrak{j} + 0{,}7785\,\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{D} = 4{,}8357\,\mathfrak{i} - 3{,}4656\,\mathfrak{j} + 0{,}9220\,\mathfrak{k}.$$



Maßstab 1 : 50 000.
Äquidistanz 50 m.

Die übrigen Punkte liefern die Fehlergleichungen

$$
\begin{aligned}
-4{,}6169\,X_1 + 0{,}9163\,X_2 + 14{,}9585\,X_3 - 0{,}0051 &= f_x^{(5)}\\
+5{,}8177\,X_1 + 2{,}1785\,X_2 - 11{,}9897\,X_3 - 57 &= f_y^{(5)}\\
-1{,}0865\,X_1 + 0{,}0569\,X_2 + 3{,}3545\,X_3 - 21 &= f_z^{(5)}\\
-1{,}4903\,X_1 - 1{,}0316\,X_2 - 0{,}4925\,X_3 - 4 &= f_x^{(6)}\\
+0{,}0951\,X_1 + 0{,}2488\,X_2 + 0{,}2555\,X_3 - 39 &= f_y^{(6)}\\
+0{,}1114\,X_1 + 0{,}0282\,X_2 + 0{,}3439\,X_3 - 13 &= f_z^{(6)}\\
-1{,}6816\,X_1 - 1{,}3290\,X_2 - 0{,}1333\,X_3 - 1 &= f_x^{(7)}\\
+0{,}0889\,X_1 + 0{,}3642\,X_2 + 0{,}2194\,X_3 - 17 &= f_y^{(7)}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
-\ 0{,}0450\ X_1 - 0{,}0651\ X_2 + \ \ 0{,}4906\ X_3 + \quad 4 &= f_z^{(7)} \\
-\ 1{,}7953\ X_1 - 0{,}5464\ X_2 + \ \ 0{,}4740\ X_3 - \quad 28 &= f_x^{(8)} \\
+\ 0{,}8708\ X_1 + 0{,}1281\ X_2 - \ \ 0{,}8644\ X_3 - \quad 66 &= f_y^{(8)} \\
+\ 0{,}0050\ X_1 + 0{,}1029\ X_2 + \ \ 0{,}4347\ X_3 - \quad 23 &= f_z^{(8)} \\
-\ 8{,}2148\ X_1 - 5{,}9962\ X_2 + 10{,}3327\ X_3 + \quad 49 &= f_x^{(9)} \\
+\ 2{,}7727\ X_1 + 1{,}1018\ X_2 - \ \ 4{,}9866\ X_3 + \quad 115 &= f_y^{(9)} \\
-\ 1{,}5871\ X_1 - 1{,}1581\ X_2 + \ \ 2{,}0383\ X_3 - \quad 14 &= f_z^{(9)} \\
-\ 9{,}2642\ X_1 - 9{,}3643\ X_2 + \ \ 8{,}5894\ X_3 + \quad 6 &= f_x^{(10)} \\
+\ 1{,}0210\ X_1 + 1{,}0036\ X_2 - \ \ 1{,}4569\ X_3 + \quad 33 &= f_y^{(10)} \\
-\ 1{,}9277\ X_1 - 1{,}9209\ X_2 + \ \ 1{,}8329\ X_3 - \quad 7 &= f_z^{(10)} \\
-\ 1{,}8323\ X_1 - 0{,}8034\ X_2 + \ \ 0{,}2765\ X_3 - \quad 13 &= f_x^{(11)} \\
+\ 0{,}6627\ X_1 + 0{,}1800\ X_2 - \ \ 0{,}5306\ X_3 - \quad 40 &= f_y^{(11)} \\
-\ 0{,}0091\ X_1 + 0{,}0514\ X_2 + \ \ 0{,}4277\ X_3 - \quad 15 &= f_z^{(11)} \\
-\ 1{,}3357\ X_1 - 0{,}8197\ X_2 - \ \ 0{,}8201\ X_3 - \quad 5 &= f_x^{(12)} \\
+\ 0{,}0762\ X_1 + 0{,}1379\ X_2 + \ \ 0{,}3154\ X_3 - \quad 44 &= f_y^{(12)} \\
+\ 0{,}2544\ X_1 + 0{,}1042\ X_2 + \ \ 0{,}1904\ X_3 - \quad 13 &= f_z^{(12)} \\
-\ 8{,}1844\ X_1 - 7{,}1871\ X_2 + \ \ 7{,}3256\ X_3 - \quad 8 &= f_x^{(13)} \\
+\ 1{,}9131\ X_1 + 0{,}6051\ X_2 - \ \ 2{,}2636\ X_3 - \quad 53 &= f_y^{(13)} \\
-\ 1{,}4847\ X_1 - 1{,}2956\ X_2 + \ \ 1{,}3853\ X_3 - \quad 19 &= f_z^{(13)}
\end{aligned}
$$

Das Koeffizientenschema der Normalgleichungen wird:

+ 312,1771	+ 223,5660	− 395,6168	− 0,0160
	+ 194,9220	− 222,3436	− 0,0290
		+ 657,7580	− 0,0202
			+ 0,000 383 26

Hieraus ergeben sich für die Komponenten des Verschiebungsvektors $\mathfrak{X} = X_1 \mathfrak{i} + X_2 \mathfrak{j} + X_3 \mathfrak{k}$ die Werte:

$X_1 = + 0{,}00019 \pm 0{,}00153;$
$X_2 = + 0{,}00016 \pm 0{,}00118;$
$X_3 = + 0{,}00020 \pm 0{,}00056;$

Reduzierte Fehlerquadratsumme = 0,00037170.

Die Koordinaten des verbesserten Standpunktes sind also:

$$x_0' = 3473{,}39\,\text{m} \pm 1{,}53\,\text{m}; \quad x_0' = 9169{,}86\,\text{m} \pm 1{,}18\,\text{m};$$

$$z_0' = 2541{,}70\,\text{m} \pm 0{,}56\,\text{m}.$$

Die übrig bleibenden Fehler vor und nach der Ausgleichung sind aus folgender Tabelle ersichtlich (Einheit 1 m).

Nummer	vor der Ausgleichung			nach der Ausgleichung		
	f_x	f_y	f_z	f_x	f_y	f_z
5	− 5,1	− 5,7	− 2,1	− 2,9	− 6,6	− 1,6
6	− 0,4	− 3,9	− 1,3	− 0,9	− 3,8	− 1,2
7	− 0,1	− 1,7	+ 0,4	− 0,6	− 1,6	+ 0,5
8	− 2,8	− 6,6	− 2,3	− 3,1	− 6,6	− 2,2
9	+ 4,9	+ 11,5	− 1,4	+ 4,5	+ 11,2	− 1,5
10 △	+ 0,6	+ 3,3	− 0,7	− 0,9	+ 3,4	− 1,0
11	− 1,3	− 4,0	− 1,5	− 1,7	− 4,0	− 1,4
12	− 0,5	− 4,4	− 1,3	− 1,0	− 4,3	− 1,2
13	− 0,8	− 5,3	− 1,9	− 2,0	− 5,3	− 2,1

Zur angenäherten Bestimmung der inneren Orientierung wurden wieder die Punkte 1, 2, 3, 4 verwendet. Die Logarithmen der Komponenten der Vektoren $\mathfrak{a}_i$ sind

$\mathfrak{a}_1$	9,93424	9,66410 n	9,34220
$\mathfrak{a}_2$	9,98327	9,23108 n	9,32759 n
$\mathfrak{a}_3$	9,99136	8,75297 n	9,27703
$\mathfrak{a}_4$	9,90483	9,76018 n	9,18502.

Man erhält schließlich für die innere Orientierung

$\Xi = +1{,}79$ mm; $H = +36{,}56$ mm; $D = 314{,}37$ mm;

sowie die Transformationsformeln:

	i	j	f
i′	− 0,40812	− 0,91266	− 0,02260
j′	− 0,13692	+ 0,03671	+ 0,98990
f′	− 0,90261	+ 0,40709	− 0,13994

Die Ausgleichung der inneren Orientierung ergibt für die Normalgleichungen das folgende Koeffizientenschema; dabei wurde für die Koordinaten des Bildraumes 1 m als Einheit gewählt.

111,8061	− 2,8251	− 13,0746	0	+ 37,3996	− 3,2316	− 0,003956
	+ 115,3628	− 8,4674	− 37,3996	0	+ 4,8593	− 0,166603
		+ 10,7649	+ 3,2316	− 4,8593	0	− 0,021575
			+ 12,1800	− 0,340i	− 1,5277	+ 0,052078
				+ 12,5772	− 1,0159	− 0,000859
					+ 1,2428	+ 0,002094
						+ 0,00055218

Die Lösung ist

$Y_1 = -0{,}00426 \pm 0{,}00274$; $U_1 = +0{,}02852 \pm 0{,}00933$;

$Y_2 = +0{,}01126 \pm 0{,}00299$; $U_2 = +0{,}01401 \pm 0{,}00834$;

$Y_3 = +0{,}00346 \pm 0{,}00065$; $U_3 = -0{,}01033 \pm 0{,}00153$.

Reduzierte Fehlerquadratsumme = 0,00006868.

Die endgültigen Koordinaten des Hauptpunktes sind

$\Xi' = -2{,}47$ mm $\pm 2{,}74$ mm; $H' = +47{,}82$ mm $\pm 2{,}99$ mm;

und die verbesserte Bildweite ist

$D' = 317{,}83$ mm $\pm 0{,}65$ mm.

Infolge der Drehung $\mathfrak{U}$ gehen die Vektoren i′, j′, f′ über in

$\mathfrak{I}' = \mathfrak{i}' + |\mathfrak{U}\mathfrak{i}'$ $\mathfrak{J}' = \mathfrak{j}' + |\mathfrak{U}\mathfrak{j}'$ $\mathfrak{K}' = \mathfrak{f}' + |\mathfrak{U}\mathfrak{f}'$.

Nach geeigneter Reduktion bekommt man daher die Transformationsformeln:

	i	j	f
$\mathfrak{I}'$	− 0,39389	− 0,91863	− 0,03064
$\mathfrak{J}'$	− 0,16681	+ 0,03866	+ 0,98522
$\mathfrak{K}'$	− 0,90389	+ 0,39319	− 0,16848

Die Richtungskosinus der optischen Achse sind:

$\alpha_0 = +0{,}90389 \pm 0{,}00303$

$\beta_0 = -0{,}39319 \pm 0{,}00777$

$\gamma_0 = +0{,}16848 \pm 0{,}00933.$

Der Schnittpunkt der durch den verbesserten optischen Mittelpunkt in der Richtung $\mathfrak{k}$ gezogenen Geraden mit der Bildebene $\mathfrak{J}'\mathfrak{J}'$ ist der Nadir bezw. Zenith des Bildes; die Koordinaten desselben sind:

$\xi_z = -60{,}27$ mm;

$\eta_z = +1906{,}34$ mm.

Die Neigung des Horizontes gegen die ξ-Achse ist

$0{,}03110 \pm 0{,}00172$

$= \operatorname{tg}(1^0 46' 53'' \pm 5' 55'');$

die Koordinaten des Schnittpunktes des Horizontes mit der Hauptvertikalen endlich sind

$\xi_h = -0{,}78$ mm;

$\eta_h = -6{,}48$ mm.

Rechnet man das Bündel $\mathfrak{h}_i'$ in das System $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ um und vergleicht es dann mit dem Bündel $\mathfrak{g}_i$, so erhält man folgende Tabelle:

Nummer	Komponenten der Vektoren $\mathfrak{g}_i$			Komponenten der Vektoren $\mathfrak{h}_i'$			Fehler der Komponenten			Winkelfehler	
	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$	horizontal	vertikal
1	0,85948	−0,46142	+0,21989	0,85871	−0,46254	+0,22053	+0,00077	+0,00112	−0,00064	− 4′44″	− 2′16″
2	0,96218	−0,17024	−0,21261	0,96390	−0,16439	−0,20946	− 172	− 585	− 315	−21′19″	−11′ 4″
3	0,98028	−0,05662	+0,18924	0,98035	−0,05615	+0,18900	− 7	− 47	+ 24	+ 1′39″	+ 51″
4	0,80323	−0,57569	+0,15312	0,80362	−0,57480	+0,15418	− 39	− 89	− 106	+ 3′23″	− 3′41″
5	0,70359	−0,69333	+0,15568	0,70394	−0,69270	+0,15677	− 35	− 63	− 109	+ 2′31″	− 3′49″
6	0,98972	−0,07871	−0,11944	0,98950	−0,08020	−0,12032	+ 22	+ 149	+ 88	− 5′13″	+ 3′ 2″
7	0,99698	−0,06561	−0,04115	0,99708	−0,06456	−0,04049	− 10	− 105	− 66	+ 3′38″	− 2′16″
8	0,92423	−0,37926	−0,04478	0,92339	−0,38127	−0,04496	+ 84	+ 201	+ 18	− 7′27″	+ 37″
9	0,91662	−0,35902	+0,17590	0,91744	−0,35688	+0,17598	− 82	− 214	− 8	+ 8′ 0″	− 15″
10	0,97044	−0,11902	+0,20994	0,97052	−0,11850	+0,20980	− 8	− 52	+ 14	+ 1′51″	+ 29″
11	0,95072	−0,30670	−0,04567	0,95064	−0,30692	−0,04564	+ 8	+ 22	− 3	− 49″	− 6″
12	0,97623	−0,08104	−0,20106	0,97616	−0,08283	−0,20068	+ 7	+ 179	− 38	− 6′17″	− 1′19″
13	0,96345	−0,21003	+0,16615	0,96322	−0,21148	+0,16569	+ 23	+ 145	+ 46	− 5′ 6″	+ 1′36″